Iterativne metode:

Polazeći od proizvoljnog vektora x_0, rekurentnom formulom $x_{k+1} = G_k(x_0, ...x_k)$ određuje se niz vektora koji pod određenim uslovima konvergiraju ka rešenju sistema $Ax = b$.

Ako G_k zavisi od $x_k, ...x_{k-l}$, a ne zavisi od $x_{k-l}, ...x_0$, tj. $x_{k+1} = G(x_{k-l}, ..., x_k)$ onda se ona naziva **(l+1) - slojnom metodom**.

Ako G_k ne zavisi od k onda je **stacionarna** metoda.

Red metode (p) definiše se kao: $||x^* - x_{n+1}|| \leq C \cdot ||x_{n+1} - x_n||^p, \quad C = const.$

Neka je G operator koji preslikava kompletan normiran prostor B u samog sebe.
Nepokretna tačka operatora G je svaka tačka $x \in B$ za koju je $x = G(x)$.
G je **operator kontrakcije** u zatvorenoj lopti $S(x_0, r) = \{x| \; ||x - x_0|| \leq r\} \subset B$ ako postoji $q \in \mathbb{R}, \; 0 \leq q < 1$ takvo da $||G(x) - G(y)|| \leq q \cdot ||x - y||$.
Takvo q se naziva **koeficijentom kontrakcije**.

Banahova teorema o nepokretnoj tački
Neka je G operator kontrakcije u $S(x_0, r)$ sa koeficijentom kontrakcije q i neka je x_0 takvo da je $\frac{1}{1-q}||G(x_0) - x_0|| \equiv r_0 \leq r$. Tada važi:
1) Niz $\{x_n\}$ određen rekurentnom formulom $x_{k+1} = G(x_k), k = 0, 1, ...$ konvergira ka nekoj tački $x^* \in S(x_0, r_0)$.
2) x^* je nepokretna tačka operatora G.
3) x^* je jedinstvena nepokretna tačka operatora G u $S(x_0, r)$.
4) Apriorna ocena greške $||x^* - x_n|| \leq \frac{q^n}{1-q}||x_1 - x_0||$.
Aposteriorna ocena greške $||x^* - x_{n+1}|| \leq \frac{q}{1-q}||x_{n+1} - x_n||$.

Dokaz:

1) Dokažimo najpre indukcijom da iteracije $x_k = G(x_{k-1})$ pripadaju $S(x_0, r_0)$.
Za $k = 1$:
$\frac{1}{1-q}||G(x_0) - x_0|| = r_0 \leq r \quad \setminus \cdot (1-q)$
$\Longrightarrow ||x_1 - x_0|| = (1-q) \cdot r_0 \leq r_0$ jer je $0 \leq q < 1$
$\Longrightarrow x_1 \in S(x_0, r_0)$

$k \Longrightarrow k + 1$?
$x_1, ..., x_k \in S(x_0, r_0) \Longrightarrow x_{k+1} \in S(x_0, r_0)$?

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - x_k|| &= ||G(x_k) - G(x_{k-1})|| \\
&\leq q||x_k - x_{k-1}|| \qquad \text{jer je kontrakcija} \\
&= q||G(x_{k-1}) - G(x_{k-2})|| \\
&\leq q^2||x_{k-1} - x_{k-2}|| \\
&\leq ... \\
&\leq q^k||x_1 - x_0|| \\
&= q^k(1-q)r_0 \qquad (\star)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - x_0|| &\leq ||x_{k+1} - x_k|| + ||x_k - x_{k-1}|| + ... + ||x_1 - x_0|| \\
&\leq q^k(1-q)r_0 + q^{k-1}(1-q)r_0 + ... + q^0(1-q)r_0 \qquad \text{na osnovu } (\star) \\
&= (1-q)r_0(q^k + q^{k-1} + ... + q + 1) \\
&= r_0(1-q)\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \qquad \text{parcijalna suma geometrijskog reda } \sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \\
&= (1-q^{k+1})r_0 \\
&\leq r_0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow x_{k+1} \in S(x_0, r_0)$.

Dokažimo sada je niy $\{x_n\}$ konvergira tako što ćemo da dokažemo da je Košijev. Za proizvoljno $m > k$:

$$\begin{aligned}
||x_m - x_k|| &\leq ||x_m - x_{m-1}|| + ||x_{m-1} - x_{m-2}|| + ... + ||x_{k+1} - x_k|| \\
&\leq q^{m-1}(1-q)r_0 + q^{m-2}(1-q)r_0 + ... + q^k(1-q)r_0 \qquad \text{na osnovu } (\star) \\
&= q^k(1-q)r_0(q^{m-k-1} + q^{m-k-2} + ... + q + 1) \\
&= q^k(1-q)r_0 \sum_{j=0}^{m-k-1} q^j \\
&\leq q^k(1-q)r_0 \sum_{j=0}^{\infty} q^j \\
&= q^k r_0(1-q)\frac{1}{1-q} \qquad \text{geometrijski red } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \\
&= q^k r_0 \longrightarrow 0, \text{ kada } k \to \infty \qquad (\diamond)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \{x_k\}$ je Košijev $\Longrightarrow$ konvergira ka nekoj tački $x^* \in S(x_0, r_0)$ jer je $S \subset B$ zatvoren, a B je kompletan.

2) Ocenimo rastojanje tačaka x^* i $G(x^*)$:

$$\begin{aligned} ||x^* - G(x^*)|| &= ||x^* - x_{k+1} + x_{k+1} - G(x^*)|| \\ &\leq ||x^* - x_{k+1}|| + ||x_{k+1} - G(x^*)|| \\ &= ||x^* - x_{k+1}|| + ||G(x_k) - G(x^*)|| \\ &\leq ||x^* - x_{k+1}|| + q||x_k - x^*|| \\ &\leq q^{k+1} r_0 + q \cdot q^k r_0 \qquad\qquad \text{na osnovu } (\diamond) \\ &= 2q^{k+1} r_0 \longrightarrow 0 \quad \text{kada } k \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

$\Longrightarrow ||x^* - G(x^*)|| = 0 \Longleftrightarrow x^* - G(x^*) = 0$
$\Longrightarrow x^* = G(x^*)$.

3) PPS: postoje dve nepokretne tačke $x^* \neq \bar{x}$ takve da $x^*, \bar{x} \in S$ i $x^* = G(x^*), \bar{x} = G(\bar{x})$.

$$||\bar{x} - x^*|| = ||G(\bar{x}) - G(x^*)|| \leq q||\bar{x} - x^*|| < ||\bar{x} - x^*||$$

$\Longrightarrow ||\bar{x} - x^*|| < ||\bar{x} - x^*||$, jer je $q < 1 \Longrightarrow$ kontradikcija.

4) Apriorna ocena greške:
Iz $(\diamond)$: $||x_m - x_n|| \leq q^n r_0 \qquad \backslash \lim\limits_{m\to\infty}$

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} ||x_m - x_n|| = ||x^* - x_n|| &\leq q^n r_0 \\ &= q^n \frac{1}{1-q} ||G(x_0) - x_0|| \\ &= \frac{q^n}{1-q} ||x_1 - x_0|| \end{aligned}$$

Dodatno, broj iteracija koji je potrebno uraditi da bi se postigla tačnost ε: $n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-q)}{||x_1 - x_0||}}{\ln q}$

Aposteriorna ocena greške:

$$\begin{aligned} ||x_{n+1} - x^*|| &= ||G(x_n) - G(x^*)|| \\ &\leq q||x_n - x^*|| \\ &= q||x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x^*|| \\ &\leq q(||x_{n+1} - x_n|| + ||x_{n+1} - x^*||) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow ||x_{n+1} - x^*|| - q||x_{n+1} - x^*|| \leq q||x_{n+1} - x_n||$
$\Longrightarrow (1-q)||x_{n+1} - x^*|| \leq q||x_{n+1} - x_n||$
$\Longrightarrow ||x^* - x_{n+1}|| \leq \frac{q}{1-q} ||x_{n+1} - x_n||$